1	2	3	4	5	6	7	8

Adı-Soyadı:
Numarası:

MAT 101 ANALİZ I DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) $f(x)=\sqrt{-\sin^2(3x)-\cos^2(3x)}+\ln\left(\sqrt{\pi x}+1\right)$ **ile tanımlı** f **fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.**

2) $\mathbb{Q}$ **rasyonel sayılar kümesinin** $\mathbb{R}$ **reel sayılar kümesi üzerinde her yerde yoğun olduğunu (yani** $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ **olduğunu) gösteriniz.**

3) Stolz teoremini kullanarak $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$ **olduğunu gösteriniz.**

4) $a_n=\cos\dfrac{1}{2}-\cos\dfrac{1}{2^n}$ **genel terimli** (a_n) **dizisinin monotonluğunu ve sınırlılığını inceleyiniz. Buna göre yakınsak olup olmadığını belirleyiniz.**

5) a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+\cos x}{x^4+\sin x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{|x-2|\operatorname{sgn}(x-2)}{x-2}$

limitlerini inceleyiniz.

6) $f(x)=\begin{cases}\arcsin x+\arccos x, & -1\le x<0\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0\\ \log(1+\sin x), & 0<x\le1\end{cases}$ **ile tanımlı** f **fonksiyonu** $[-1,1]$ **aralığında sürekli midir? Süreksiz olduğu nokta varsa süreksizlik türünü belirleyiniz.**

7) Ekstremum Değer teoremini (Weierstrass teoremini) ifade ediniz. $f:[-3,5]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x-8$ **fonksiyonu için teoremi gerçekleyiniz.** $f(c)=1$ **olacak şekilde** $c\in[-3,5]$ **sayısı var mıdır? Açıklayınız.**

Not : Süre 100 dakikadır. Sorular eşit puanlıdır. Başarılar dileriz.

B. Sağır Duyar, İ. Eryılmaz

1) $f(x)=\sqrt{-\sin^2(3x)-\cos^2(3x)}+\ln(\sqrt{\pi x}+1)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: $f_1(x)=\sqrt{-\sin^2(3x)-\cos^2(3x)}$ ve $f_2(x)=\ln(\sqrt{\pi x}+1)$ olsun.

$$D_{f_1}=\{x\in\mathbb{R}:\ -\sin^2(3x)-\cos^2(3x)\geq 0\}$$

$-\sin^2(3x)-\cos^2(3x)\geq 0$ eşitsizliğini sağlayan x reel sayılarını bulalım. Her $x\in\mathbb{R}$ için $\sin^2(3x)+\cos^2(3x)\geq 0$ olduğu için $-\sin^2(3x)-\cos^2(3x)\geq 0$ eşitsizliği $\sin 3x=0$ ve $\cos 3x=0$ olması ile mümkündür. Ancak her $x\in\mathbb{R}$ için $\sin^2 3x+\cos^2 3x=1$ olduğu bilindiğinden $\sin 3x=\cos 3x=0$ olması durumu hiçbir x reel sayısı için sağlanmaz. Bu nedenle $D_{f_1}=\emptyset$ dir.

Bu durumda D_{f_2} kümesini bulmaya gerek yoktur.

$D_f=D_{f_1}\cap D_{f_2}=\emptyset$ dir.

D_{f_2} yi bulmak istersek;

$$D_{f_2}=\{x\in\mathbb{R}:\ \sqrt{\pi x}+1>0 \text{ ve } \pi x\geq 0\}$$

$\forall x\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ için $\sqrt{\pi x}+1>0$ dır ve $\pi x\geq 0$ dır.

$$D_{f_2}=\mathbb{R}^+\cup\{0\}=[0,\infty).$$

2) Ders notlarında var.

Soru 3) Stolz teoreminden yararlanarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$ olduğunu gösteriniz

ÇÖZÜM $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \ln n$ ve $y_n = n$ olmak üzere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizilerini tanımlayalım.

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n < n+1 \Rightarrow y_n < y_{n+1}$

olup $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi artandır. Ayrıca

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n - \ln(n-1)}{n-(n-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$= \ln 1$$

$$= 0$$

dır. O halde Stolz teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = l = 0$$

elde edilir.

4) $a_n = \cos\frac{1}{2} - \cos\frac{1}{2^n}$ genel terimli (a_n) dizisinin monotonluğunu ve sınırlılığını inceleyiniz. Buna göre yakınsak olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm: $a_n = \cos\frac{1}{2} - \cos\frac{1}{2^n}$

$$a_{n+1} - a_n = \left(\cos\frac{1}{2} - \cos\frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(\cos\frac{1}{2} - \cos\frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \cos\frac{1}{2^n} - \cos\frac{1}{2^{n+1}} < 0$$

$$\boxed{0 < \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}}$$

Kosinüs fonksiyonu 1. bölgede pozitif ve azalandır. Bu nedenle $\cos\frac{1}{2^n} < \cos\frac{1}{2^{n+1}}$ dir.

olduğundan (a_n) dizisi monoton azalandır.

Ayrıca

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos\frac{1}{2^n} < 1$$

$$\Rightarrow -1 < -\cos\frac{1}{2^n} < 0$$

$$\Rightarrow \left(\cos\frac{1}{2}\right) - 1 < \cos\frac{1}{2} - \cos\frac{1}{2^n} < \cos\frac{1}{2}$$

olduğundan (a_n) dizisi alttan ve üstten sınırlıdır.

O halde (a_n) dizisi monoton azalan ve alttan sınırlı olduğu için Monoton Yakınsaklık teoremi gereği yakınsaktır.

+

5) a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}} = ?$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\left(\sqrt{x+5} + \sqrt{3-x}\right)}{\left(\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{x+5} + \sqrt{3-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\left(\sqrt{x+5} + \sqrt{3-x}\right)}{x+5-(3-x)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\left(\sqrt{x+5} + \sqrt{3-x}\right)}{2x+2}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{3-x}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4} + \sqrt{4}}{2}$$

$$= \frac{2+2}{2} = 2$$

5) b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4 + \cos x}{x^4 + \sin x} = ?$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 + \cos x}{x^4 + \sin x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4\left(1 + \frac{\cos x}{x^4}\right)}{x^4\left(1 + \frac{\sin x}{x^4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{\cos x}{x^4}}{1 + \frac{\sin x}{x^4}}$$

yazılır. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $-1 \leq \sin x \leq 1$ ve $-1 \leq \cos x \leq 1$

biçimindedir. Buradan

$$-\frac{1}{x^4} \leq \frac{\sin x}{x^4} \leq -\frac{1}{x^4} \quad , \quad \frac{-1}{x^4} \leq \frac{\cos x}{x^4} \leq \frac{1}{x^4}$$

olur. Ayrıca

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^4} = \lim_{x \to \infty} -\frac{1}{x^4} = 0$$

olduğundan, sıkıştırma teoremi gereği

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x^4} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x^4} = 0$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 + \cos x}{x^4 + \sin x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{\cos x}{x^4}}{1 + \frac{\sin x}{x^4}} = 1$$

elde edilir.

5) c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x-2| \operatorname{sgn}(x-2)}{(x-2)} = ?$

$x=2$ noktasında sağdan ve soldan limit bakılmalıdır

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2| \operatorname{sgn}(x-2)}{(x-2)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|2+h-2| \operatorname{sgn}(2+h-2)}{(2+h-2)}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h \operatorname{sgn}(h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \operatorname{sgn}(h) = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2| \operatorname{sgn}(x-2)}{(x-2)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|2-h-2| \operatorname{sgn}(2-h-2)}{(2-h-2)}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h \cdot \operatorname{sgn}(-h)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} -\operatorname{sgn}(-h) = 1$$

olup,

$$\lim_{x \to 2} \frac{|x-2| \operatorname{sgn}(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2| \operatorname{sgn}(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2| \operatorname{sgn}(x-2)}{(x-2)} = 1$$

elde edilir

6) $f(x) = \begin{cases} \arcsin x + \arccos x & , -1 \leq x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & , x = 0 \\ \log(1+\sin x) & , 0 < x \leq 1 \end{cases}$ ile tanımlı

f fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında sürekli midir? Süreksiz olduğu nokta varsa süreksizlik türünü belirleyiniz.

Çözüm: $-1 \leq x < 0$ için $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ olduğundan ve arcsin ve arccos fonksiyonları tanım kümelerinde sürekli olduğundan f fonksiyonu $[-1,0)$ aralığında süreklidir.

$0 < x \leq 1$ için $f(x) = \log(1+\sin x)$ ve $1+\sin x > 0$ olduğundan f fonksiyonu $(0,1]$ aralığında süreklidir.

Şimdi $x=0$ noktasını ele alalım.

$f(0) = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \arcsin x + \arccos x = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \log(1+\sin x) = \log(1+\sin 0) = \log 1 = 0$$

Sağ ve sol limit birbirinden farklı olduğundan $x=0$ sıçramalı süreksizlik noktasıdır.

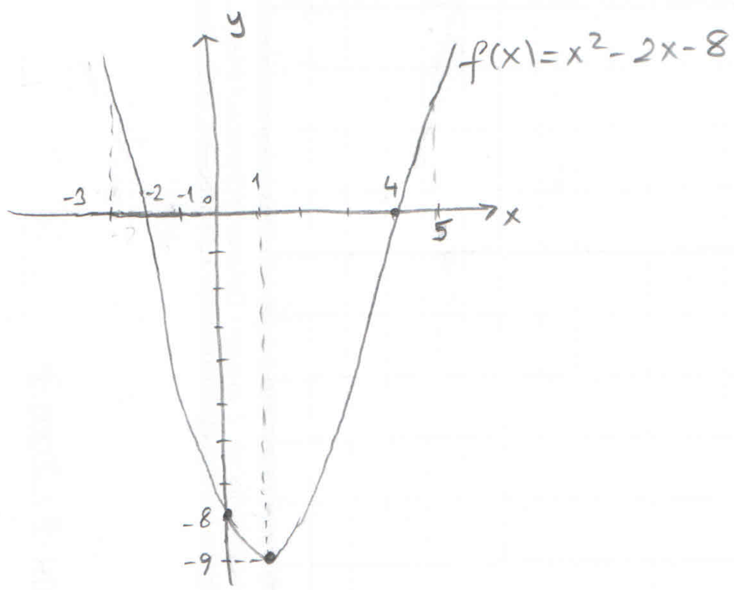
7) Ekstremum Değer teoremini (Weierstrass teoremini) ifade ediniz. $f: [-3,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 8$ fonksiyonu için teoremi gerçekleyiniz. $f(c) = 1$ olacak şekilde $c \in [-3,5]$ sayısı var mıdır? Açıklayınız.

Çözüm: $f(x) = x^2 - 2x - 8 = (x-1)^2 - 9$ parabol

Tepe Noktası: $(1,-9)$

Eksenleri kestiği noktalar: $(0,-8)$, $(4,0)$, $(-2,0)$

$f(-3) = f(5) = 7$



⌈Ekstremum Değer Teoremi: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f, mutlak maksimum ve mutlak minimum değerine sahiptir. Yani $\forall x \in [a,b]$ için

$$f(x_{min}) = m \leq f(x) \leq M = f(x_{max})$$

olacak şekilde $x_{min}, x_{max} \in [a,b]$ noktaları vardır.⌋

$f(x) = x^2 - 2x - 8$ ile tanımlı f fonksiyonu polinom fonksiyon olduğundan süreklidir. Ayrıca f fonksiyonunun tanım kümesi de $[-3,5]$ kapalı aralığı olduğundan teorem gerçeklenir. Yani $\forall x \in [-3,5]$ için $f(1) = -9 \leq f(x) \leq 7 = f(-3) = f(5)$ dir.

$m = -9$, $x_{min} = 1$ dir.

$M = 7$, $x_{max} = -3$ ve $x_{max} = 5$ dir.

$-9 < 1 < 7$ olduğundan $f(c) = 1$ olacak şekilde $c \in [-3,5]$ vardır.

$f(c) = 1 \Rightarrow c^2 - 2c - 8 = 1 \Rightarrow c^2 - 2c - 9 = 0$

$\Delta = 4 - 4.1.(-9) = 40$

$c_1 = \frac{2+\sqrt{40}}{2} = 1+\sqrt{10}$, $c_2 = 1-\sqrt{10}$

$c_1, c_2 \in [-3,5]$